Афанасьева Виктория Викторовна,

учитель математики высшей квалификационной категории,

ГБОУ школа № 292 Фрунзенского района Санкт-Петербурга;

Алексеева Наталья Евгеньевна,

учитель математики высшей квалификационной категории,

ГБОУ школа № 292 Фрунзенского района Санкт-Петербурга

**Решение задач с параметром в курсе средней школы 7-11 классов**

*В статье приведена классификация методов решения задач с параметром курса средней школы 7-11 классов с подробным решением задач каждого типа. Данный материал может быть использован учителем для подготовки обучающихся к государственной итоговой аттестации (ГИА) в 9 и 11 классах.*

Решение задач с параметрами предполагает особую исследовательскую деятельность, для реализации которой необходимо уверенное владение школьной программой, умения выдвигать и доказывать гипотезы, проводить сложные логические построения и делать выводы. Эти задачи относятся к самым сложным задачам ГИА.

По формулировкам все задачи с параметром можно условно разделить на два типа:

1. Найти все значения параметра, для каждого из которых выполняются те или иные условия, при этом сами решения находить не требуется.
2. Найти все значения параметра, при каждом из которых задача имеет решение, указать эти решения для каждого такого параметра.

Классифицируем задачи с параметром по принципу поиска метода решения:

1. Задачи с параметром, решаемые методом логического перебора.
2. Квадратный трёхчлен в задачах с параметром: теорема Виета, расположение корней, исследование квадратного трехчлена.
3. Применение свойств функций: монотонность, ограниченность, четность.
4. Графические методы: метод областей, преобразование графиков, геометрические идеи.

В каждом из предложенных классов приведём примеры соответствующих задач с подробным описанием.

**Задача № 1 (задача 1 типа).**

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет ровно один корень на отрезке [4; 8].

Решение: ООУ: Рассмотрим уравнение , откуда . Уравнение имеет ровно один корень тогда и только тогда, когда:

A). Корни совпадают:, откуда a = -2,5. Тогда х = 4,5 принадлежит отрезку [4; 8] и удовлетворяет ООУ;

 Б). Первый корень  принадлежит отрезку [4; 8] и удовлетворяет ООУ. Тогда уравнение имеет единственное решение на заданном отрезке, если второй корень не принадлежит отрезку [4; 8] или не удовлетворяет ООУ. Имеем: Получаем: -2<a≤1;

В). Второй корень   принадлежит отрезку [4; 8] и удовлетворяет ООУ. Тогда уравнение имеет единственное решение на заданном отрезке, если первый корень не принадлежит отрезку [4; 8] или не удовлетворяет ООУ. Имеем: Получаем: <a<-3.

Ответ: <a<-3, a=-2,5, -2< a ≤1.

**Задача № 2 (задача 2 типа).**

При каких значениях параметра а уравнение - (8а+5)•+16+20а-14=0 имеет единственное решение?

Решение: Пусть (t>0), тогда уравнение примет вид , D=, а, следовательно, уравнение всегда разрешимо и его корни различны. По условию необходим только один положительный корень, а, значит, возможно два случая. Обозначим f(t)=.

1 случай) f(0)<0, откуда и -1,75<а<0,5;

2 случай) f(0)=0, откуда а=-1,75 или а=0,5,

При а=-1,75 имеем t=0, t=-9, уравнение не имеет корней;

При а=0,5 имеем t=0, t=9, уравнение имеет один корень.

Ответ: при -1,75< а ≤0,5 уравнение имеет единственное решение.

**Задача 3 (задача 2 типа)**. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет на отрезке   ровно три корня.

Решение: Пусть  , получим квадратное относительно переменной t уравнение. На искомом отрезке уравнение вида    имеет либо 2 решения при -1<t<0, 0<t<1, либо одно при t=1 или t=-1, либо 3 решения при t=0. Таким образом, чтобы исходное уравнение имело 3 решения на данном отрезке, необходимо, чтобы одним из корней квадратного уравнения было число 1, 0 или -1. Заметим, что в случае 1 и -1, нам еще нужен второй корень из множества (-1;0);(0;1), а в случае 0, нужно, чтобы других корней из множества [-1;1]  у квадратного уравнения не было. Подставляя 0, 1 и -1 поочередно в квадратное уравнение, получаем a(a-2)(a-3)=0 (1), , . Из первого уравнения a=0, a=2, a=3. Для каждого из трёх значений проверяем второй корень уравнения (если он есть) и получаем, что условиям задачи удовлетворяют только два значения: a=0,a=2. Решая третье уравнение, получаем a=3,  .  После проверки (с помощью теоремы Виета найдём второй корень) остаётся только одно значение . Предположим, что второе уравнение имеет некоторое решение. Тогда второй корень квадратного уравнения, найденный по теореме Виета, равен и должен находиться в интервале (-1;1). Но в этом случае левая часть второго уравнения положительна при a≠2, значит, решать второе уравнение не имеет смысла. Ответ: {0;2;

**Задача 4 (задача 2 типа).**

Найдите все значения a, при которых уравнение =имеет ровно два различных корня.

Решение: Пусть. Если t>1,то  . Если t=1, тогда x=0 — единственный корень. Обозначим f(t)= . Исходное уравнение имеет ровно два корня тогда и только тогда, когда уравнение f(t)=0 имеет ровно один корень больший 1. Уравнение  =0  имеет ровно один корень, если D=0, то есть при a=-2, a=-42. При a =-2 уравнение  имеет единственный корень t=1. В этом случае исходное уравнение имеет единственный корень x=0. При  a=-42 уравнение   имеет единственный корень t= . В этом случае исходное уравнение имеет два корня. Графиком функции f(t) является парабола, ветви которой направлены вверх. Для того чтобы уравнение  f(t)=0 имело два корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство f(1),то есть -2< a <3. Ответ: -2<a<3,a=-42.

**Задача 5 (задача 3 типа).** Найдите все значения параметра a,  при которых уравнение x++x+a=3sinx имеет хотя бы одно решение.

Решение: Запишем уравнение в виде: x+=+ (3sinx-a). Рассмотрим функцию  f(t)=. Данная функция является суммой двух возрастающих на R функций и поэтому возрастает на R (также можно легко доказать через f´). Исходное уравнение имеет вид f(x)=f что равносильно уравнению x=, откуда a=3-x. Функция y=  принимает значения от -1 до 1, а функция z = 3y-  монотонно возрастает на отрезке  и принимает на нём значения от -4 до 2,  значит, уравнение a=3sinx-x  и исходное уравнение имеют решение при -4≤a≤2. Ответ: .

Задачи, в которых графические интерпретации играют основную роль, можно условно разделить на три группы. Задачи первой группы имеют степень параметра обычно равной 1, что позволяет изобразить множество всех точек плоскости xOa, удовлетворяющих условию задачи в виде некоторой области, что и дает названию метода как «метода областей». Ко второй группе задач отнесем задачи, предполагающие построение графиков функций через элементарные преобразования, так и при помощи производной. Большинство задач третьей группы связаны с уравнением окружности, формулой расстояния между точками, уравнением прямой, то есть методом координат.

**Задача 6 (задача 4 типа).** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система  имеет ровно два решения.

Решение: Неравенство (1) задает пару вертикальных углов на координатной плоскости Oxy (рисунок 1).



 Рисунок 1

Графиком уравнения (2) является окружность радиуса  R=, центр которой ― точка P(-a;a) лежит на прямой y=-x. Поскольку оба графика симметричны относительно прямой y=-x, система будет иметь ровно два решения тогда и только тогда, когда расстояние PK от центра окружности до прямой y=2x  будет равняться радиусу R=  данной окружности. Из треугольника POK находим: PK=PO , где tgα ― угловой коэффициент прямойy=0,5x. Таким образом, tgα = 0,5; =, =, откуда PK = PO)=. Получаем: , a=0,5 или a=-0,25.

Ответ: a=0,5 или a=-0,25.

Задача 7 (задача 4 типа).

Найдите все значения параметра , при каждом из которых система не имеет решений.

Решение: Уравнение  задает на плоскости пучок прямых, проходящих через точку A(0;2), за исключением оси ординат. Неравенство системы  задает объединение круга с центром в точке K(3;3)  и радиусом 1 и точки M(1;0).  Система не будет иметь решений тогда и только тогда, когда прямая    не имеет общих точек с кругом и не проходит через точку M. Пусть α — угол между касательными к окружности, проведёнными из точкиA(0;2). Тогда тангенс угла , образованного этими касательными с прямой AK, равен  (рисунок 2).

 

 Рисунок 2

Воспользовавшись формулой тангенса двойного угла, получим tgα=0,75, значит, для касательных к окружности a=0 и a=0,75. Прямая AM имеет угловой коэффициент -2. Отсюда получаем ответ: a<-2,-2<a<0,a>0,75.

В заключение отметим, что данной типологии задач с параметром и описанных методов решения удобно придерживаться на факультативных (элективных) курсах, направленных на углубленное изучение курса математики в старшей школе.

Список источников:

1. Козко А.И., Парфенов В.С., Сергеев И.Н., Чирский В.Г. «Задачи с параметром», Москва, издательство МЦНМО, 2013
2. Шахмайстер А.Х. «Задачи с параметром на экзаменах», Санкт-Петербург, Москва, Петроглиф, МЦНМО, 2011
3. Шестаков С.А. «Задачи с параметром», Москва, издательство МЦНМО, 2014
4. Открытый банк задач ЕГЭ <http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege>
5. Московский центр непрерывного математического образования МЦНМО, проект <http://www.problems.ru/>
6. Московский центр непрерывного математического образования МЦНМО, интернет-библиотека Виталия Арнольда <http://ilib.mccme.ru/>